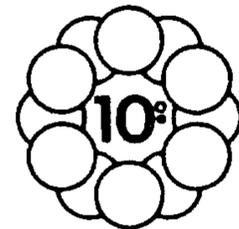


UM NOVO MODELO PARA O EFEITO DE TAMANHO  
DE MATERIAIS FRÁGEIS



UNICAMP

Angelo Rubens Migliore Junior  
Edgar Dutra Zanotto  
Departamento de Engenharia de Materiais - DEMA/UFSCar



cbecimat

Propõe-se um novo modelo para avaliar o efeito de tamanho de um corpo sobre a resistência mecânica segundo a estatística de fratura frágil. Este modelo foi testado com os resultados de fratura a flexão relatados na literatura de 118 amostras de nitreto de silício sinterizado. A previsão teórica apresentou boa correlação com os resultados experimentais.

INTRODUÇÃO

Efeito de escala ou efeito de tamanho é o comportamento característico dos materiais frágeis de diminuir a resistência mecânica com o aumento das dimensões do corpo. Na falta de um modelo teórico completo para explicar tal comportamento, o modelo empírico de Weibull [1] (baseado na estatística da fratura frágil) têm sido correntemente utilizado para avaliar tal efeito. Segundo este modelo, a probabilidade acumulada de fratura  $P_F$  de um conjunto de resultados de fratura deve seguir a relação

$$P_F = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \right)^m \left( \frac{V_e}{V_0} \right) \right], \quad (1)$$

onde  $\sigma_f$  é a tensão de fratura observada,  $\sigma_0$  e  $m$  são parâmetros empíricos a determinar,  $V_e$  é o volume efetivo e  $V_0$  é a unidade de volume.

Conforme demonstrado por Migliore Jr. e Zanotto [2], o volume efetivo é relacionado ao volume real  $V$  do corpo cerâmico através da relação

$$V_e = \lambda \cdot V, \quad (2)$$

onde  $\lambda < 1$  é uma função adimensional que depende da geometria do corpo, do campo de tensão aplicado  $\sigma$  e do módulo de Weibull  $m$ , dada por

$$\lambda = \frac{1}{V} \int_V \left( \frac{\sigma}{\sigma_f} \right)^m dV. \quad (3)$$

De acordo com a Eq. (1), o efeito de tamanho é descrito para uma determinada probabilidade acumulada de fratura (por exemplo, 50%), através da relação

$$\sigma_1/\sigma_2 = (T_2/T_1)^{1/m}, \quad (4)$$

onde os índices correspondem aos conjuntos de resultados 1 e 2 e  $T$  é uma dimensão característica da amostra, tal como o volume, a superfície ou o comprimento. Geralmente, a dimensão  $T$  é tomada apenas como o volume efetivo ou a superfície efetiva, assumindo como correta a dimensão que melhor verificar

a Eq. (4). No entanto, certos materiais cerâmicos não satisfazem as relações (1) e (4), o que tem levado alguns pesquisadores a postular outros modelos para explicar tal comportamento [2-6].

MODELO PROPOSTO

Com o auxílio da função de Evans [7]

$$E = - \ln(1 - P_F), \quad (5)$$

pode-se linearizar a Eq. (1) obtendo-se

$$\ln E = m \cdot \ln(\sigma_f/\sigma_0) + \ln(V_e/V_0). \quad (6)$$

Dessa forma, é esperado que um material que obedece à Eq. (1) apresente um gráfico linearizado entre a probabilidade acumulada de fratura e a tensão observada tal como indicado na Fig. 1. Nesta figura, cada reta apresentada corresponde a uma determinada dimensão ou tamanho do conjunto de corpos de prova e a reta horizontal tracejada corresponde à probabilidade de fratura de 50%.

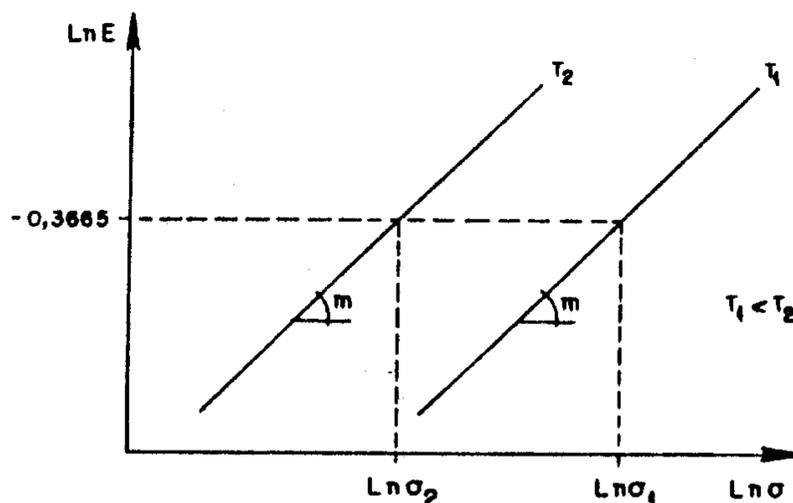


Fig. 1 - Gráfico probabilidade acumulada de fratura versus tensão para conjuntos de amostras de tamanhos diferentes.

Como pode ser observado na Fig. 1, sendo possível determinar um único módulo de Weibull  $m$ , as retas apresentadas devem ter mesmo coeficiente angular.

Dessa forma, pode-se impor de modo abreviado que a probabilidade acumulada de fratura é uma função de pelo menos duas

variáveis, ou seja, da tensão de fratura observada e do tamanho do corpo. Ressalte-se que as Eqs. (2) e (3) indicam que o tamanho T engloba também o tipo de ensaio, o que implica que idênticos corpos de prova sujeitos a diferentes tipos de ensaios possuem diferentes probabilidades de fratura.

Com o intuito de propor um modelo empírico consistente que possa melhor descrever o efeito de tamanho do corpo sobre a resistência à fratura de materiais frágeis, foram assumidas as seguintes hipóteses:

- a) a distribuição de Weibull pode ser utilizada de modo geral para descrever diversas ocorrências estatísticas com o mérito maior da simplicidade matemática;
- b) a probabilidade acumulada de fratura como função apenas da distribuição das tensões observadas para um determinado conjunto de corpos de prova mantendo o tamanho T constante é bem descrita pela relação

$$P_{F,T=cte} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^m\right]; \quad (7)$$

- c) a variável para descrever o efeito de tamanho dos corpos pode ser unicamente o volume efetivo obtido de acordo com a Eq. (3); e
- d) a probabilidade acumulada de fratura como função apenas do tamanho dos corpos de prova mantendo a tensão de fratura constante pode ser bem descrita por uma distribuição weibullina tal como

$$P_{F,\sigma=cte} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\lambda V}{V_0}\right)^n\right], \quad (8)$$

onde  $n$  e  $V_0$  são parâmetros empíricos a determinar, sendo o primeiro adimensional e o segundo com dimensão de volume.

Tendo em vista as hipóteses acima, propõe-se que a probabilidade acumulada de fratura como função tanto do campo de tensão aplicado ao corpo quanto do tamanho desse corpo possa ser descrita pela relação funcional empírica dada por

$$P_F = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^m \left(\frac{\lambda V}{V_0}\right)^n\right], \quad (9)$$

onde  $\sigma_f$ ,  $\sigma_0$ ,  $m$ ,  $\lambda$  e  $V$  têm o mesmo significado indicado nas Eqs. (1) e (3) e  $n$  e  $V_0$  são parâmetros a serem determinados.

Linearizando agora a Eq. (9) pode-se obter

$$\ln E = m \cdot \ln(\sigma_f/\sigma_0) + n \cdot \ln(V_e/V_0) \quad (10)$$

a qual define uma superfície plana no sistema tri-dimensional  $\ln \sigma_f$ ,  $\ln V_e$ ,  $\ln E$ .

Plotando-se a Eq. (10) apenas no primeiro quadrante do espaço considerado, obtém-se a Fig. 2. As inclinações das intersecções dessa superfície com os 3 planos cartesianos de referência estão indicadas nesta figura através dos coeficientes angulares  $m$  e  $n$ .

Segundo o modelo proposto, o efeito de tamanho para uma determinada probabilidade de fratura é dado através da relação decorrente da Eq. (9), ou seja

$$\sigma_1/\sigma_2 = (T_2/T_1)^{n/m} \quad (11)$$

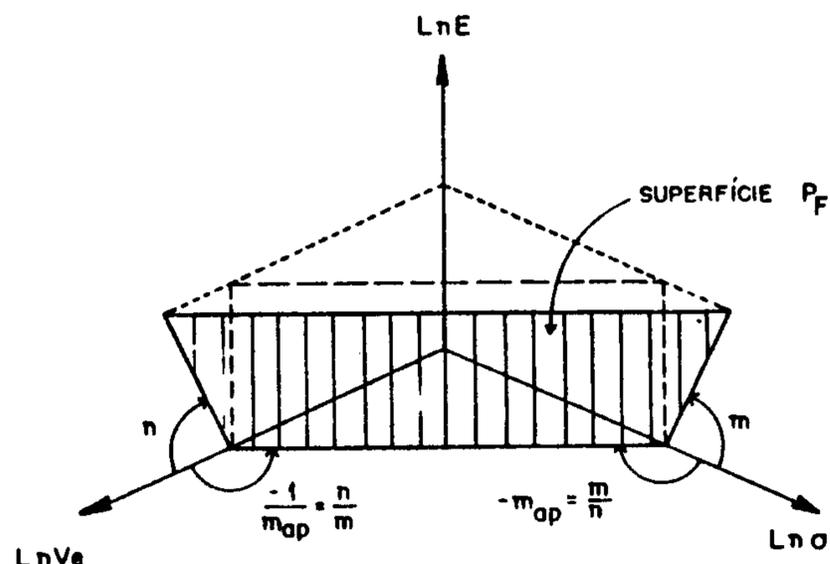


Fig. 2 - Gráfico da probabilidade acumulada de fratura versus tensão e volume efetivo.

## VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL

Para averiguar a validade das Eqs. (9) e (11), é necessária a execução de um grande número de ensaios nos quais são variadas as dimensões dos corpos de prova. É desejável que o tipo de ensaio também seja variado, de modo a avaliar com precisão a influência do parâmetro  $\lambda$ . Como tais ensaios ainda estão sendo realizados sob a orientação destes autores, Migliore Jr. [8] testou o modelo proposto com diversos conjuntos de resultados experimentais publicados na literatura.

Neste trabalho, a previsão teórica foi confrontada com 118 resultados de fratura obtidos por Katayama e Hattori [9] em 6 conjuntos de ensaios de flexão a 3 e 4 pontos de amostras de seção retangular de nitreto de silício sinterizado. A Tabela 1 sumariza os resultados originais obtidos a partir de regressões independentes efetuadas a partir da Eq. (1). Plotando-se os resultados da tensão média de fratura e do volume efetivo da Tabela 1, obtém-se o gráfico da Fig. 3.

Tabela 1 - Resultados de fratura obtidos por Katayama e Hattori [9].

ensaio	tipo	m	V (mm <sup>3</sup> )	V <sub>e3</sub> (mm <sup>3</sup> )	σ <sub>med</sub> (MPa)
A	3 ptos	11,0	80	0,28	638
B	3 ptos	9,6	360	1,57	492
C	3 ptos	7,3	640	4,65	461
D	3 ptos	7,6	3200	21,63	412
E	4 ptos	9,7	3600	6,66	391
F	4 ptos	10,4	9600	16,01	357

A partir da Eq. (9), foi efetuada uma regressão não linear com todos os 118 resultados de fratura. Para tanto, os resultados individuais foram agrupados em classes de tensão, conforme descrito por Migliore Jr. e Zanotto [10], sendo utilizado o procedimento numérico descrito por Migliore Jr. [11] para efetuar a regressão não linear.

Os cálculos efetuados resultaram em  $m = 10,58$ ;  $\sigma_0 = 194,34$  MPa;  $n = 1,51$  e  $V_0 = 1,04$  cm<sup>3</sup>, com coeficiente de correlação de 0,8187.

Plotando-se a tensão média de fratura versus o volume efetivo (recalculado com os dados acima para regressão com 4 parâmetros e todos ensaios), foi obtida a reta indicada na Fig. 3.

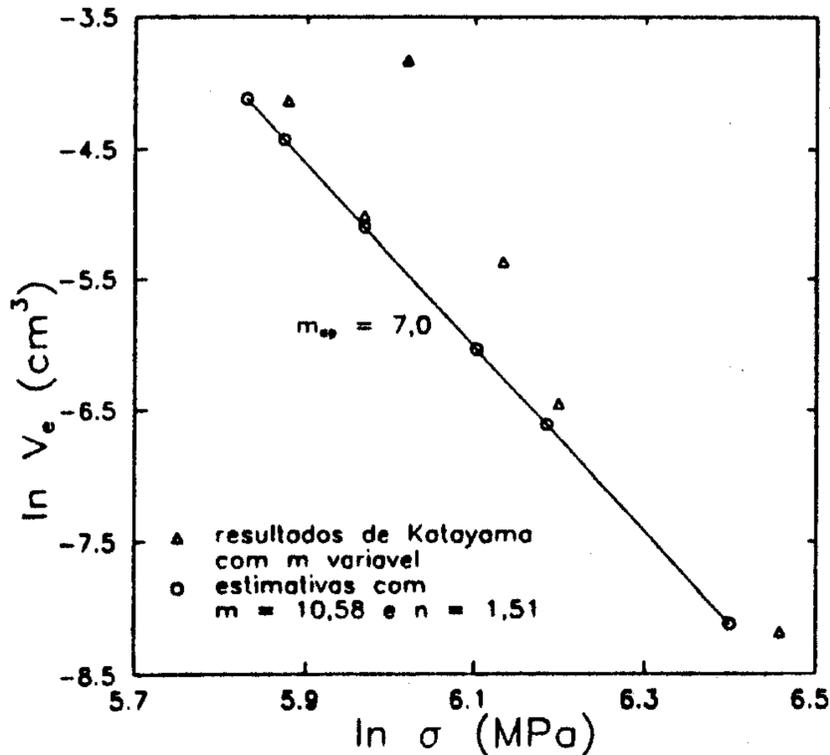


Fig. 3 - Gráfico volume efetivo versus tensão para os resultados experimentais de Katayama e Hattori [9] ( $P_F = 50\%$ ).

#### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Calculando-se a reta de correlação entre as tensões médias de fratura e os volumes efetivos da Tabela 1, a inclinação desta reta (não indicada na Fig. 3) coincide com a média de  $\approx 9,3$  dos valores de  $m$  obtidos através das regressões independentes.

A consideração equivalente do efeito de tamanho como função da superfície das amostras resultou em inclinação da reta de correlação da ordem de 6, ou seja, significativamente diferente do valor médio de  $m$ . A partir destes resultados, Katayama e Hattori [9] concluíram que o material analisado segue a estatística de Weibull com defeitos distribuídos no volume das amostras e estimativa para o parâmetro  $m$  equivalente à média dos resultados obtidos.

Como tanto a tensão média quanto o volume efetivo dependem do valor do módulo de Weibull  $m$ , as discrepâncias observadas na locação dos pontos na Fig. 3 correspondentes a cada ensaio devem-se ao fato dos valores de  $\sigma_{med}$  e  $V_e$  da Tabela 1 haverem sido obtidos a partir de diferentes estimativas para  $m$ , enquanto que os pontos correspondentes à reta indicada foram obtidos com uma única estimativa ( $m = 10,58$ ).

É necessário destacar que os pontos correspondentes aos ensaios A, B, E e F são bastante próximos de acordo com os resultados de Katayama e Hattori e de acordo com os resultados obtidos neste trabalho com a regressão com 4 parâmetros. Para estes ensaios, as estimativas de  $m$  da Tabela 1 são próximas do valor de 10,58 utilizado para plotar a reta da Fig. 3.

Para comparação com os resultados individualizados dos ensaios originais, são apresentados nas Figs. 4 e 5 os gráficos linearizados da função de Evans versus a tensão de fratura (agrupados em classes de tensão) com os 4 parâmetros calculados segundo o modelo proposto.

Por outro lado, a mesma tendência observada na Fig. 3 também é observada na Fig. 5, ou seja para os ensaios nos quais as estimativas de  $m$  da Tabela 1 são bastante afasta-

das da média, observa-se baixa correlação entre a previsão teórica e os resultados experimentais, tais como os ensaios C e, principalmente, D.

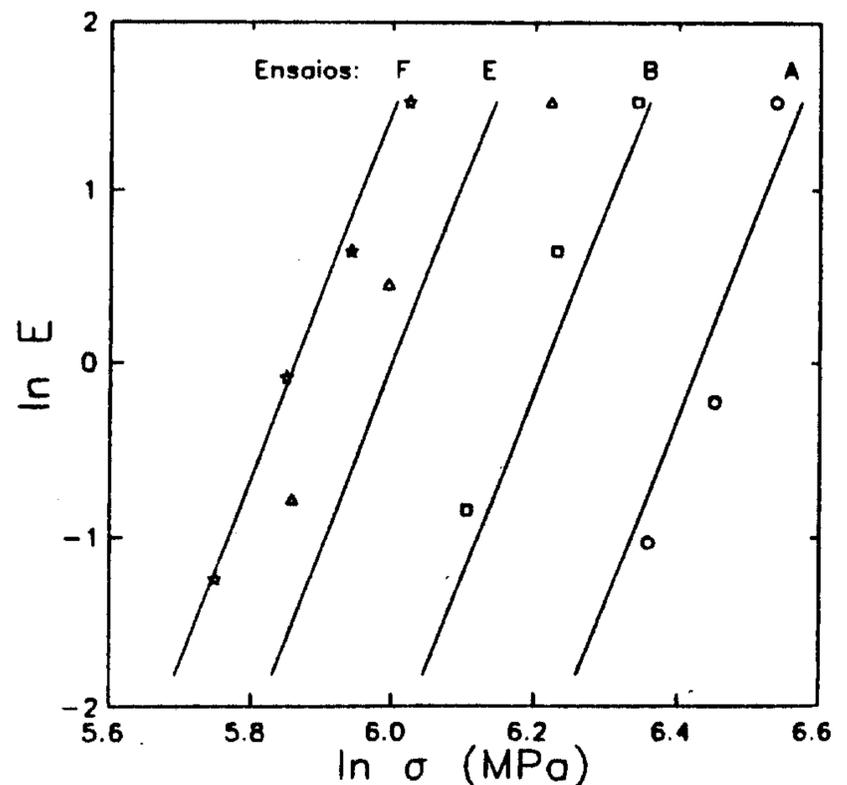


Fig. 4 - Gráfico probabilidade versus tensão para os ensaios A, B, E e F de Katayama e Hattori [9].

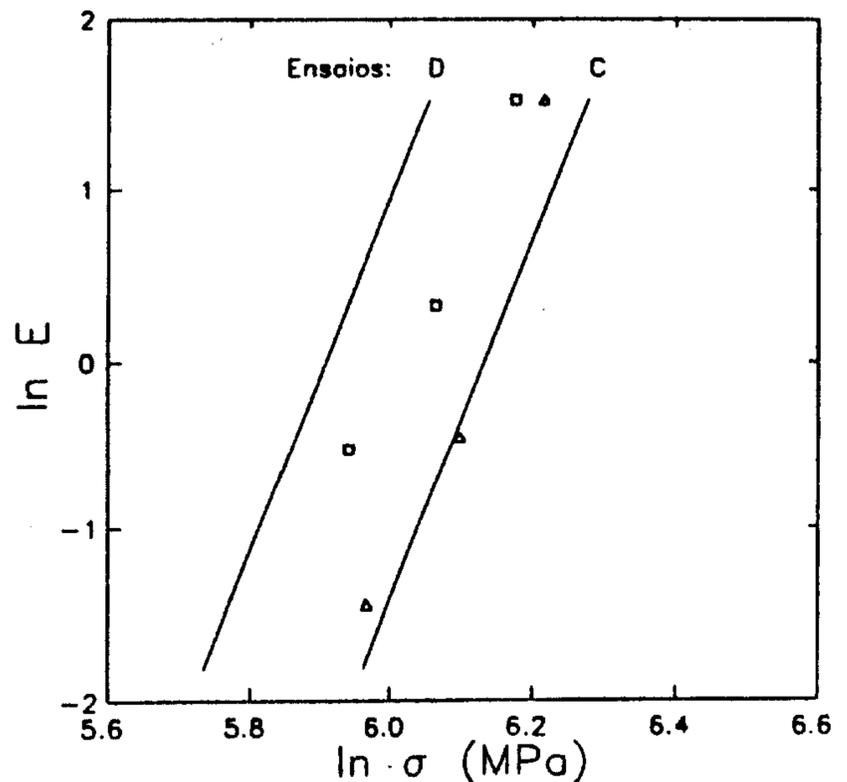


Fig. 5 - Gráfico probabilidade versus tensão para os ensaios C e D de Katayama e Hattori.

Para comprovação da validade das Eqs. (9) e (11), justifica-se a existência da superfície tri-dimensional da Fig. 2 com o fato de cada reta inclinada apresentada nas Figs. 1, 4 e 5 serem simplesmente as interseções desse plano inclinado com os planos verticais correspondentes a um determinado tamanho constante.

De modo semelhante, a reta da Fig. 3 corresponde à intersecção da superfície de fratura tri-dimensional com o plano horizontal correspondente a uma determinada probabilidade acumulada de fratura (no caso, de 50%). Nesta figura, está destacada a

inclinação da reta indicada como sendo

$$m_{ap} \approx m/n = 10,58/1,51 = 7,0 \quad (12)$$

a qual significaria um módulo de Weibull aparente a ser usado em conjunto com a Eq. (4) para avaliar o efeito de tamanho como alternativa à utilização da Eq. (11).

#### CONCLUSÃO

O efeito de tamanho sobre a resistência mecânica é bem descrito pela relação funcional empírica a quatro parâmetros dada por

$$P_F = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_0} \right)^m \left( \frac{\lambda V}{V_0} \right)^n \right]$$

onde  $P_F$  é a probabilidade acumulada de fratura,  $\sigma_f$  é a tensão de fratura observada,  $V$  é o volume real do corpo ensaiado,  $\lambda$  é uma função adimensional do parâmetro  $m$ , do campo de tensão aplicado e da geometria do corpo,  $m$  e  $n$  são parâmetros adimensionais e  $\sigma_0$  e  $V_0$  são parâmetros com dimensão de tensão e de volume, respectivamente.

#### REFERÊNCIAS

- [1] WEIBULL, W. - Statistical theory of strength of materials. *Ing. Vetenskaps Akad. Handl.*, 151:45, 1939 apud Weil, N.A. e Daniel, I. M. - Analysis of fracture probabilities in nonuniformly stressed brittle materials. *J. Am. Ceram. Soc.*, 47(6):228-74, 1964.
- [2] LEWIS III, D. e OYLER, S. M. - An experimental test of Weibull scaling theory. *J. Am. Ceram. Soc.*, 59(11-12): 507-510, 1976.
- [3] EVANS, A.G. - A general approach for the statistical analysis of multiaxial fracture. *J. Am. Ceram. Soc.*, 61(7-8): 302-08, 1978.
- [4] BATDORF, S. B. e HEINISCH JR., H. L. - Weakest link theory reformulated for arbitrary fracture criterion. *J. Am. Ceram. Soc.*, 61(7-8):355-58, 1978.
- [5] SCOTT, W. D. e GADDIPATI, A. - Weibull parameters and the strength of long glass fibers. In: *Fracture mechanics of ceramics*. Vol. 3 Ed. por R. C. Brandt, D.P.H. Hasselmann e F. F. Lange. New York, Plenum Press, 1978. pp.125-142
- [6] KITTL, P. e GÜNTHER, O. - Volume size and fracture statistics of compacted cement paste. *Res. Mech. Lett.*, 1(4): 145-48, 1981.
- [7] EVANS, A. G. e JONES, R. L. - Evaluation of a fundamental approach for the statistical analysis of fracture. *J. Am. Ceram. Soc.*, 61(3-4):156-60, 1978.
- [8] MIGLIORE JR., A.R. - Modelos matemáticos para avaliação do comportamento termomecânico de materiais frágeis. São Carlos, UFSCar, 1992. 244p. (Tese de doutorado).
- [9] KATAYAMA, Y. e HATTORI, Y. - Effects of specimen size on strength of sintered silicon nitride. *J. Am. Ceram. Soc.*, 65(10):C164-C165, 1982.
- [10] MIGLIORE JR., A.R. e ZANOTTO, E.D. - Sobre a determinação dos parâmetros de Weibull. *Cerâmica*, 38(253):7-11, 1992.
- [11] MIGLIORE JR., A.R. - Procedimento numérico para determinação dos parâmetros de Weibull. (aceito para publicação na *Revista Cerâmica*, 1992)

#### SUMMARY

A new model is proposed to evaluate the specimen size effect on the mechanical strength by brittle fracture statistics. This model was tested with results of bending fracture reported in the literature for 118 specimens of sintered silicon nitride. The theoretical prediction shows good correlation with the experimental data.