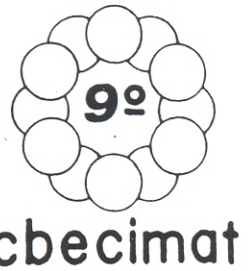


EFEITO DO VOLUME EFETIVO SOBRE A RESISTÊNCIA MECÂNICA DE CERÂMICAS E VIDROS ATRAVÉS DA ESTATÍSTICA DE WEIBULL



Angelo Rubens Migliore Junior e Edgar Dutra Zanotto
Departamento de Engenharia de Materiais - DEMA/UFSCar

SUMÁRIO

Demonstra-se de maneira original a determinação da integral de Weibull e da relação teórica entre tensões de ruptura a tração obtidas através de ensaios diferentes, enfatizando a utilização do volume efetivo. São analisados os ensaios de flexão a 3 e 4 pontos e flexão pura de barras de seção transversal retangular e circular e o ensaio de compressão diametral de discos (Brazilian Test). Os resultados são analisados para a relativa severidade de cada ensaio.

INTRODUÇÃO

A resistência a tração de cerâmicas e vidros depende fortemente da distribuição, tamanho e geometria de micro-defeitos na superfície e no volume dos mesmos, assim como da probabilidade desses defeitos estarem sujeitos a uma tensão crítica que leva à ruptura do corpo cerâmico.

Reconhecendo a característica probabilística da resistência, Weibull [1] propôs a seguinte equação para descrever a probabilidade de fratura P_f de uma amostra traçionada:

$$P_f = 1 - \exp(-B) \quad (1)$$

onde B é uma função da distribuição de defeitos, denominada aqui como integral de Weibull.

Na realidade, materiais frágeis tais como cerâmicas e vidros são particularmente sensíveis às perturbações de borda existentes devido à aplicação da força axial no ensaio de tração simples, mascarando a resistência mecânica, como discutido por Marschall & Rudnick [2]. Dessa forma, outros tipos de ensaios são realizados para determinar a máxima tensão de tração σ_{max} a que uma amostra pode ser submetida. Dentre estes, o mais comum é o ensaio de flexão a 3 ou 4 pontos.

Outro tipo de ensaio para avaliar a tensão de ruptura a tração é o de compressão diametral de discos e cilindros (Brazilian Test), o qual, pela sua simplicidade mostra-se particularmente interessante para materiais frágeis mas é pouco explorado [3]. Além destes, para fibras utiliza-se também o ensaio de flexão pura.

EFEITO DO VOLUME

Para uma peça de volume V submetida a um estado de tensões qualquer σ ($\sigma > 0$ é considerada aqui como tensão de tração), a integral de Weibull B considerando o volume da amostra pode ser expressa por [1]:

$$B = \left\{ \int_V \left[\frac{\sigma}{\sigma_o} \right]^m dV \right. \quad \text{para } \sigma > 0 \quad (2a)$$

$$\left. \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{para } \sigma \leq 0 \quad (2b)$$

onde m e σ_o são parâmetros característicos do

material, sendo o primeiro adimensional e o outro com dimensão de [tensão] x [volume]^{1/m}.

Para o caso de uma peça submetida a um ensaio de tração simples, as tensões em planos perpendiculares à direção da carga aplicada P são simplesmente:

$$\sigma = \frac{P}{S} = \sigma_{max} \quad (3)$$

onde S é a área da seção transversal da peça. Dessa forma, a Eq. (2a) fica:

$$B = \left[\frac{\sigma_{max}}{\sigma_o} \right]^m V \quad (4)$$

As Eqs. (1) e (4) mostram que duas peças de volumes diferentes V_1 e V_2 têm a mesma probabilidade de fratura quando submetidas às tensões σ_1 e σ_2 tal que:

$$\sigma_1^m V_1 = \sigma_2^m V_2 = cte \quad (5)$$

Nota-se que quanto maior for o volume da peça, menor deve ser a tensão σ que leva a uma determinada probabilidade de fratura P_f em um ensaio de tração simples.

Sendo a peça submetida a uma distribuição de tensões diferente do ensaio de tração simples, a Eq. (2) deve ser avaliada corretamente, como discutido a seguir.

Feito isto, para qualquer distribuição de tensões pode-se reescrever a Eq. (4) como:

$$B = \left[\frac{\sigma_{max}}{\sigma_o} \right]^m \left\{ V \left[\frac{V_e}{V} \right] \right\} \quad (6)$$

onde V_e é o volume efetivo, o qual pode ser entendido como o volume fictício de uma amostra que, se submetida a tração uniforme σ_{max} em todo o volume, teria a mesma probabilidade de fratura que uma amostra de volume V quando submetida a outra distribuição de tensões com mesma tensão máxima σ_{max} . Dessa forma, a Eq. (5) pode ser reescrita para permitir comparar tensões de mesma probabilidade de fratura obtidas por ensaios diferentes:

$$\sigma_1^m V_{e1} = \sigma_2^m V_{e2} \quad (7)$$

ENSAIO DE FLEXÃO

A Fig. 1 esquematiza a disposição de carga em uma amostra prismática submetida a um ensaio típico de flexão.

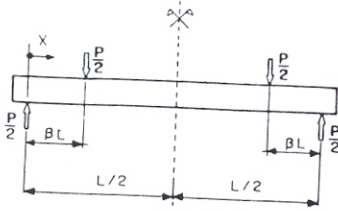


Fig. 1 - Esquema de aplicação de carga em um ensaio de flexão

Sendo L a distância entre as cargas externas, introduzimos aqui o parâmetro adimensional β para determinar a posição das cargas internas a partir das cargas externas, com a vantagem de tratar diversos casos de flexão de forma única. Assim, caso o ensaio seja a 4 pontos, com a disposição mais usual onde as cargas internas são aplicadas simetricamente a 1/4 do comprimento L, tem-se $\beta = 1/4$. Para o caso de ensaio de flexão a 3 pontos, as cargas internas mostradas na Fig. 1 são superpostas e $\beta = 1/2$.

A tensão normal σ_x (com direção paralela ao eixo da amostra, Fig. 2) pode ser calculada em qualquer ponto do volume pela Teoria Elementar de Vigas [4] como sendo:

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_x = \frac{M}{I} y \quad (8)$$

onde $\sigma_x(x, y)$ é uma tensão que depende das coordenadas x e y, I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo horizontal z e y é a ordenada vertical, medidos a partir do centro geométrico da seção transversal.

Na Eq. (8), M é o momento fletor provocado pelas cargas e é obtido por:

$$M = \begin{cases} Px/2 & \text{para } 0 \leq x < \beta L \\ \beta PL/2 & \text{para } \beta L \leq x \leq L/2 \end{cases} \quad (9)$$

Dessa forma, as tensões na amostra são obtidas pela simples substituição da Eq. (9) na Eq. (8):

$$\sigma = \sigma_x = \begin{cases} Pxy/2I & \text{para } 0 \leq x < \beta L \\ \beta PLy/2I & \text{para } \beta L \leq x \leq L/2 \end{cases} \quad (10)$$

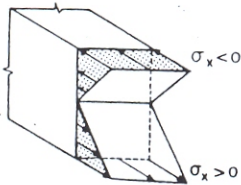


Fig. 2 - Distribuição de tensões σ_x em barra fletida de seção transversal retangular

Seção Transversal Retangular

Caso a seção transversal da amostra seja retangular de largura b e altura h, tem-se:

$$I = bh^3/12 \quad \text{e} \quad \sigma_{\max} = 3\beta PL/bh^2 \quad (11)$$

Em razão da simetria envolvida, a integral B, calculada para $\sigma > 0$, fica:

$$B = 4 \int_0^{L/2} \int_0^{h/2} \int_0^{b/2} \left[\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \right]^m dz dy dx \quad (12)$$

Introduzindo as variáveis dimensionais $\xi = \frac{x}{L/2}$; $\eta = \frac{y}{h/2}$ e $\zeta = \frac{z}{b/2}$ e substi-

tuindo as Eqs. (10) e (11) na (12), resulta:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \right]^m \frac{V}{2} \left[\int_0^{2\beta} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\xi\eta}{2\beta} \right]^m d\xi d\eta d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \eta^m d\xi d\eta d\zeta \right] \quad (13)$$

onde $V = bhL$ é o volume ensaiado.

Como, no caso, ξ , η e ζ são variáveis independentes, a integração da Eq. (13) resulta em:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \right]^m \left\{ \frac{V}{2(m+1)} \left[\frac{m(1-2\beta)+1}{m+1} \right] \right\} \quad (14)$$

onde o termo entre chaves é o volume efetivo V_e . Da Eq. (14) nota-se que V_e/V é um parâmetro geométrico adimensional, o qual depende apenas de m e da distribuição de tensões, e é independente do valor absoluto dessas tensões. No caso de flexão a 3 pontos ($\beta = 1/2$) tem-se:

$$\frac{V_e}{V} = \frac{1}{2(m+1)^2} \quad (15)$$

No caso de flexão a 4 pontos com $\beta = 1/4$:

$$\frac{V_e}{V} = \frac{m+2}{4(m+1)^2} \quad (16)$$

Davies [5] apresenta soluções algébricas que concordam com as Eqs. (15) e (16).

Kittl [6] trata também do caso de ensaio de flexão pura, onde a amostra é fletida por um momento fletor M constante em todo comprimento L. A Eq. (14) pode ser adaptada para abranger essa situação fazendo $\beta = 0$ e:

$$\sigma_{\max} = 6 M/bh^2 \quad (17)$$

Dessa forma, para o caso de flexão pura, a relação V_e/V resulta em:

$$\frac{V_e}{V} = \frac{1}{2(m+1)} \quad (18)$$

Seção transversal circular

No caso de seção transversal circular de diâmetro D tem-se:

$$I = \pi D^4/64 \quad \text{e} \quad \sigma_{\max} = 16 \beta PL/\pi D^3 \quad (19)$$

Para definir os limites de integração de B deve-se observar que a largura da seção transversal, medida paralelamente ao eixo horizontal z, varia de acordo com a Eq. (21) Assim, em razão da simetria existente, tem-se:

$$B = 4 \int_0^{L/2} \int_0^{h/2} \int_0^{b/2} \left[\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \right]^m dz dy dx \quad (20)$$

$$\text{onde:} \quad b/2 = \sqrt{(D/2)^2 - y^2} \quad (21)$$

Sendo agora $\xi = \frac{x}{L/2}$; $\eta = \frac{y}{D/2}$ e $\zeta = \frac{z}{D/2}$ e substituindo as Eqs. (10), (19) e (21) na (20), vem:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \right]^m \frac{2V}{\pi} \left[\int_0^{2\beta} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\eta^2}} \left[\frac{\xi\eta}{2\beta} \right]^m d\xi d\eta d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\eta^2}} \eta^m d\xi d\eta d\zeta \right] \quad (22)$$

onde $V = \pi D^2 L/4$ é o volume ensaiado.

Como ξ e η são variáveis independentes e o domínio de integração de ζ depende de η , tem-se:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_o} \right]^m \frac{2V}{\pi} \left[\frac{m(1-2\beta)+1}{m+1} \right] \int_0^1 \sqrt{1-\eta^2} \eta^m d\eta \quad (23)$$

Fazendo agora $\eta = \text{sen}\alpha$, pode-se transformar a última integral para:

$$\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2} \eta^m d\eta = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^m \alpha d\alpha - \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{(m+2)} \alpha d\alpha \quad (24)$$

cujas soluções, de acordo com Korn & Korn [7] é:

$$\int_0^1 \sqrt{1-\eta^2} \eta^m d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} \quad (25)$$

onde $\Gamma(R) = (R-1)!$ é a função gama para um número real $R > 1$.

Substituindo a Eq. (25) na Eq. (23), tem-se:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_o} \right]^m \left\{ \frac{V}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{m(1-2\beta)+1}{m+1} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} \right\} \quad (26)$$

onde o termo entre chaves é o volume efetivo V_e . No caso de ensaio de flexão a 3 pontos:

$$\frac{V_e}{V} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(m+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} \quad (27)$$

No caso de flexão a 4 pontos com $\beta = 1/4$:

$$\frac{V_e}{V} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(m+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \quad (28)$$

Para o caso de flexão pura ($\beta = 0$):

$$\frac{V_e}{V} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} \quad (29)$$

Kittl [6] apresenta soluções algébricas que concordam com as Eqs. (27) e (29). Medrano & Gillis [8] apresentam solução numérica que concorda com a Eq. (29).

ENSAIO DE COMPRESSÃO DIAMETRAL

A Fig. 3 esquematiza as características geométricas de um ensaio de compressão diametral de cilindros ou discos de espessura t , onde a carga P é aplicada numa faixa de largura finita e definida pelo ângulo α .

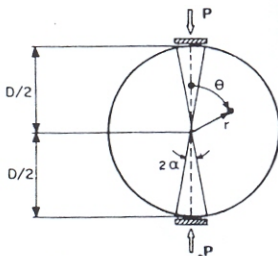


Fig. 3 - Esquema de aplicação de carga em ensaio de compressão diametral

As tensões em qualquer ponto de coordenadas (r, θ) são obtidas pelas equações de Hondros [9]:

$$\sigma_r = \beta \left\{ \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{r}{D/2} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{D/2} \right)^{2n-2} \right\}$$

$$\sigma_\theta = \beta \left\{ \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{r}{D/2} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{D/2} \right)^{2n-2} \right\} \quad (30)$$

$$\tau_{r\theta} = -\beta \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{r}{D/2} \right)^2 \right] \left(\frac{r}{D/2} \right)^{2n-2} \right\} \gamma$$

onde: $\beta = -\frac{2P}{\alpha \pi D t}$ e $\gamma = \text{sen} 2n\alpha \cos 2n\theta$

A máxima tensão normal de tração tem direção perpendicular à direção da carga aplicada e ocorre no centro do círculo, sendo calculada por:

$$\sigma_{\max} = \left[\frac{2P}{\pi D t} \right] \left[\frac{\text{sen} 2\alpha}{\alpha} - 1 \right] \quad (31)$$

Como as três tensões das Eqs. (30) são de mesma ordem de grandeza, nenhuma delas pode ser desprezada e, nesse caso, a distribuição de tensões normais principais é triaxial. A consideração do efeito tridimensional das tensões é feita aqui com o critério de Vardar e colaboradores [10] para avaliar o efeito das tensões normais $\sigma_n > 0$ em todos planos que passam por um ponto particular da amostra.

Nesse caso, a integral de Weibull fica:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_o} \right]^m \int_V \left[K \left[\frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} \right]^m dA \right] dV \quad (32)$$

onde $dA = \text{sen}\psi d\psi d\phi$ é o elemento de superfície de uma esfera de raio unitário em torno de um ponto qualquer cujas tensões principais são $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

A tensão σ_n pode ser avaliada como em Batdorf & Heinisch Jr. [11] por:

$$\sigma_n = \sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \psi + (\sigma_2 - \sigma_3) \cos^2 \phi \text{sen}^2 \psi \quad (33)$$

A constante K é um fator de correção da integral da Eq. (32) para satisfazer a situação de tração simples onde:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (34)$$

Substituindo as Eqs. (33) e (34) na Eq. (32) e integrando em toda superfície da esfera unitária, tem-se:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_o} \right]^m V K \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^{2m} \psi \text{sen} \psi d\psi d\phi \quad (35)$$

$$\text{ou:} \quad B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_o} \right]^m V K \frac{4\pi}{2m+1} \quad (36)$$

Para coincidir a Eq. (36) com a Eq. (4), é necessário que:

$$K = (2m+1)/4\pi \quad (37)$$

No caso particular do ensaio de compressão diametral, e levando em conta as simetrias existentes, a Eq. (32) fica:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_o} \right]^m 4t \int_0^{\pi/2} \int_0^{D/2} \left[8K \int_0^{\pi/2} \int_0^{\phi_1} \left[\frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} \right]^m \text{sen} \psi d\phi d\psi \right] r dr d\theta \quad (38)$$

onde ϕ_1 é o limite de integração para um certo ângulo ψ para o qual $\sigma_n > 0$ e é dado por:

$$\phi_1 = \text{arc cos } \delta \quad (39)$$

$$\text{com:} \quad \delta^2 = \frac{\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \psi}{(\sigma_3 - \sigma_2) \text{sen}^2 \psi} \quad (40)$$

Caso $\delta^2 \leq 0$, então sempre haverá um plano onde $\sigma_n > 0$ e, portanto, deve-se fazer

$\phi_1 = \pi/2$. Caso $\delta^2 \geq 1$, então não há qualquer plano onde $\sigma_n > 0$ e, portanto, deve-se fazer $\phi_1 = 0$.

Chamando de $\xi = \frac{r}{D/2}$, a Eq. (38) resulta

em:

$$B = \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \right]^m \left\{ \frac{8V}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[K \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[\frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} \right]^m \sin \psi \, d\phi \, d\psi \right] \xi \, d\xi \, d\theta \right\} \quad (41)$$

onde o termo entre chaves é o volume efetivo. As integrações da Eq. (41) só podem ser avaliadas numericamente, por exemplo através da regra de Simpson. Os resultados encontrados coincidem com os de Vardar & Finnie [12].

RESULTADOS

A Fig. 4 apresenta os valores da relação $(V_e/V)^{1/m}$ com a variação do parâmetro m para os casos de compressão diametral ($\alpha=8^\circ$), flexão pura e flexão a 3 e 4 pontos de barras de seção transversal retangular e circular. Para ensaio de compressão diametral com m variando entre 4 e 20, os resultados numéricos indicam pequena variação do volume efetivo com o ângulo de aplicação de carga (tipicamente, há diminuição de cerca de 3% para cada acréscimo de 2° em α).

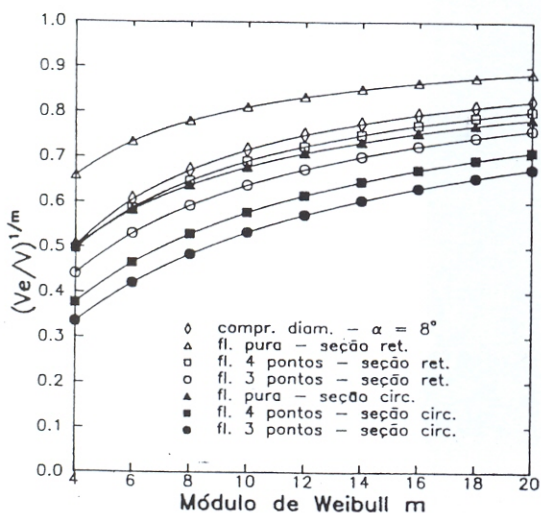


Fig. 4 - Variação de $(V_e/V)^{1/m}$ com o parâmetro m e com o tipo de ensaio

Da análise da Fig. 4 verifica-se que, para amostras de mesmo material, mesma distribuição de defeitos e mesmo volume, o tipo de ensaio e a geometria da amostra empregados para determinar a resistência média a tração de corpos cerâmicos conduz a diferentes resultados, conforme o valor do volume efetivo.

Em relação ao tipo de ensaio, o de tração simples ($V_e/V = 1$) leva à menor resistência à tração, seguido pelos resultados dos ensaios de flexão pura, compressão diametral, flexão a 4 pontos e flexão a 3 pontos, haja visto que, para amostras de mesmo volume, o volume efetivo decresce na ordem citada.

Em relação à geometria da amostra, a seção circular apresenta maiores resistências médias do que a seção retangular para qualquer tipo de ensaio de flexão com amostras de mesmo volume.

Deve-se salientar que no ensaio de compressão diametral geralmente utilizam-se amostras de volume uma ordem de grandeza menor do que as amostras de flexão. Dessa forma, é de se esperar que os resultados de resistência à tração assim obtidos sejam superiores aos obtidos por meio de ensaios de flexão.

REFERÊNCIAS

- [1] WEIBULL, W. - A statistical distribution function of wide applicability. *J Appl. Mech.*, 18(3):293-97, 1951.
- [2] MARSCHALL, C. W. & RUDNICK, A. - Conventional strength testing of ceramics. In: *Fracture mechanics of ceramics*. Plenum Press, New York, 1978. vol. 1. p.69-92
- [3] MARION, R. H. & JOHNSTONE, J. K. - A parametric study of the diametral compression test for ceramic. *Ceramic Bull.*, 56(11):998-1002, 1977.
- [4] SCHIEL, F. - *Introdução à resistência de materiais*. Harper & Row. São Paulo, 1984. 395p
- [5] DAVIES, D. G. S. - The statistical approach to engineering design in ceramics. In: *Proc. 22 of the British Ceramic Soc.* Ed. by D.J.Godfrey, June, 1973. p.429-52.
- [6] KITTL, P. - Transformation of a flexural stress Weibull's diagram into a tractional one. *Res. Mechanica*, 1(2): 161-65, 1980.
- [7] KORN, G. A. & KORN, T. M. - *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York, McGraw-Hill, 1961. 943 p
- [8] MEDRANO, R. E. & GILLIS, P. P. - Weibull statistics: tensile and bending tests. *J. Am. Ceram. Soc.*, 70(10):C-230-C232, 1987.
- [9] HONDROS, G. - The evaluation of the Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. *Australian J. Appl. Science*, 10(3): 243-68, 1974.
- [10] OH, K. P. L.; VARDAR, Ö. & FINNIE, I. - Failure of brittle solids under biaxial stress. *Int. J. Fracture*, 9(3):372-75, 1973.
- [11] BATDORF, S. B. & HEINISCH JR., H. L. - Weakest link theory reformulated for arbitrary fracture criterion. *J. Am. Ceram. Soc.*, 61(7-8):355-58, 1978.
- [12] VARDAR, Ö. & FINNIE, I. - An analysis of the Brazilian disk fracture test using the Weibull probabilistic treatment of brittle strength. *Int. J. Fracture*, 11(3):495-508, 1975.

SUMMARY

In this article original derivations are presented for the determination of Weibull's integral as well as of the theoretical relation between the tensile strength of brittle materials in different testing procedures. The following testing techniques are analysed: pure bending, three and four point bending of rods of both circular and rectangular cross sections, as well as the Brazilian disc test. Conclusions are drawn on the relative severeness of each test.