

Sobre a determinação dos parâmetros de Weibull

ANGELO RUBENS MIGLIORE JÚNIOR
EDGAR DUTRA ZANOTTO
Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Materiais - DEMa
Caixa Postal 676 - CEP 13560 - São Carlos - SP

ABSTRACT

On the evaluation of the Weibull parameters

The influence of several procedures to estimate the Weibull statistics parameters, applied to the fracture of ceramics, was studied. The linear correlation coefficient R^2 and the chi squared coefficient χ^2 were calculated for all procedures. It was demonstrated that the best evaluation of the Weibull parameters is obtained with non-linear regression and with the fracture stresses divided in classes with at least five events.

INTRODUÇÃO

A resistência à tração de cerâmicas e vidros depende fortemente da distribuição, do tamanho e da geometria de microdefeitos na superfície e no volume dos mesmos, assim como da probabilidade desses defeitos estarem sujeitos a uma tensão crítica que leve à ruptura do corpo cerâmico.

Trustrum & Jayatilaka (1) mostram que a estatística de Weibull (2) descreve melhor a probabilidade acumulada de fratura de uma amostra cerâmica quando sujeita a tensões de tração do que outras estatísticas tais como a normal, log-normal, exponencial ou gama. No entanto, tem sido também relatado que diferenças nos procedimentos de análise de resultados experimentais de testes de fratura conduzem a diferentes valores para os parâmetros estatísticos do material ensaiado.

Este artigo procura rever alguns dos motivos das discrepâncias observadas e sugere um procedimento adequado para tratamento dos dados experimentais. Para tanto, determinou-se os parâmetros de Weibull por oito procedimentos para dois conjuntos diferentes de amostras e ensaios. A comparação entre os resultados foi efetuada tomando-se por base o coeficiente de correlação R^2 e o teste do qui quadrado χ^2 , que é bastante aceito para verificar a aderência de relações estatísticas.

ESTATÍSTICA DE WEIBULL

De modo simplificado, a estatística de Weibull pode ser utilizada para relacionar a probabilidade acumulada de fratura P e a tensão de tração aplicada a um material cerâmico na forma usual com 2 parâmetros, como indica a Equação (A):

$$P = 1 - \exp \left[- \int_V \left(\sigma / \sigma_0 \right)^m dV \right] \quad (A)$$

Essa equação deve ser utilizada para uma peça de volume V submetida a um estado de tensões qualquer com $\sigma > 0$, onde m (módulo de Weibull) e σ_0 (constante escalar) são parâmetros carac-

terísticos do material, sendo o primeiro adimensional e o outro com dimensão de (tensão) \times (volume) $^{1/m}$. Tanto m quanto σ_0 dependem das condições de processamento da amostra, tais como técnica de conformação, ambiente, tratamento térmico e acabamento superficial. Além disso, os dois parâmetros são responsáveis pelo espalhamento dos resultados experimentais em torno de uma média e não somente o módulo de Weibull m , conforme já enfatizado por Scott e Gaddipati (3).

Para qualquer distribuição de tensões, a solução da integral contida na Equação (A) resulta em:

$$P = 1 - \exp \left[- \left(\sigma_{\max} / \sigma_0 \right)^m V_e / V \right] \quad (B)$$

onde V_e é o volume efetivo, o qual pode ser entendido como o volume fictício de uma mostra que, se submetida à tração uniforme σ_{\max} em todo o volume, teria a mesma probabilidade de fratura que uma amostra de volume real V quando submetida a uma outra distribuição de tensões com a mesma tensão máxima σ_{\max} .

É importante observar que a relação V_e/V é um parâmetro geométrico adimensional, o qual depende apenas de m e da distribuição de tensões, e é independente do valor absoluto dessas tensões. Apenas para o caso do estado de tensão correspondente à tração simples, a tensão é constante em todo o volume e a relação V_e/V assume o valor unitário. Algumas dessas relações foram recalculadas por Migliore & Zanotto (4) para ensaios típicos de flexão e estão resumidas na Figura 1.

León & Kittl (5) mostraram que o erro cometido na determinação dos parâmetros de Weibull quando se utiliza a Equação (B), admitindo-se $V_e/V = 1,0$, é de até 100% para o caso do parâmetro m e pode chegar a até 700% para o parâmetro σ_0 de modo a ser necessário sempre conhecer o estado de tensão aplicado ao material para a obtenção dos parâmetros estatísticos com razoável precisão.

Com relação ao número de amostras necessárias para se obter precisão nas estimativas dos parâmetros de Weibull, Glandus & Boch (6) simularam a divisão de 98 resultados teóricos de tensão que obedecem à Equação (B) em lotes de tamanhos variáveis de exemplares e verificaram uma pequena influência do tamanho do lote, para a tensão média de fratura para lotes acima de 10 exemplares. No entanto, o valor do módulo m foi fortemente afetado pelo tamanho do lote tendendo a ser assintótico somente para lotes com mais de 40 exemplares.

Para o caso de flexão a 3 pontos em barras soldadas de cobre, León & Kittl (7) também observaram a influência do tamanho do lote ao realizar a divisão de 600 amostras em grupos aleatórios de 30 e verificaram pequena dispersão estatística nas estimativas dos parâmetros do material. De modo inverso, Ikeda et alii (8) ensaiaram amostras de alumina com 92% de pureza em flexão a 3 ou 4 pontos variando o volume efetivo V_e das amostras entre 0,7 mm³ e 62,8 mm³ e o tamanho dos lotes entre 9 e 20 exemplares e encontraram o parâmetro m variando de 5,0 a 10,7.

Após ensaio de um lote de n amostras, a estimativa dos parâmetros de Weibull de um determinado material só pode ser realizada através de uma regressão entre a probabilidade acumulada de fratura P e os valores experimentais das tensões de fratura σ . Dessa forma, é necessário conhecer uma estimativa para P , o que pode ser feito conforme sugerido por Batdorf (9) dispondo o conjunto de dados experimentais de modo crescente e, de acordo com a posição i nesse arranjo, calcular P com a Equação (C):

$$P = \frac{i}{n+1} \quad (C)$$

No entanto, Hahn & Shpiro (10) indicam que essa equação é a mais apropriada somente para eventos que seguem uma estatística normal ou Gaussiana e, portanto, conduz a erro nas estimativas dos parâmetros a serem ajustados. Mais recentemente, Bergman (11) estudou o estimador dado por:

$$P = \frac{i - 0,5}{n} \quad (D)$$

e mostrou que esse tende a ser mais preciso do que aquele dado pela Equação (C).

Uma inconveniência em se utilizar as Equações (C) ou (D) ocorre no caso de conjuntos de dados experimentais com certa uni-

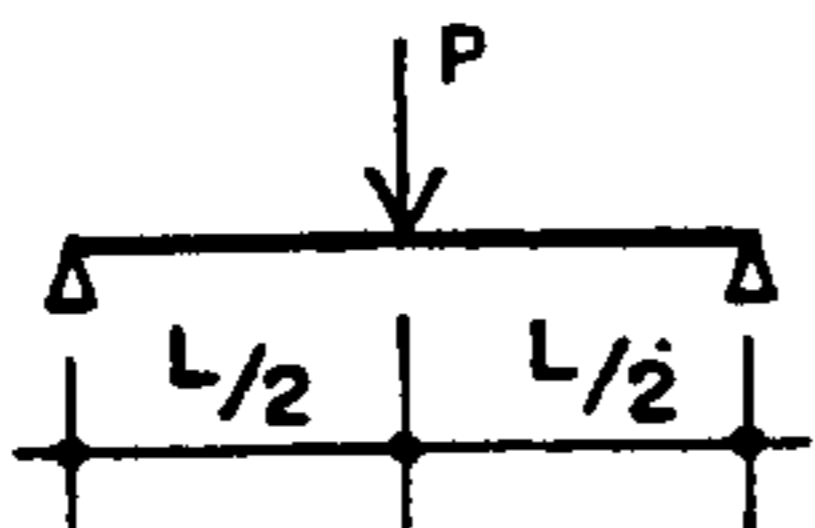
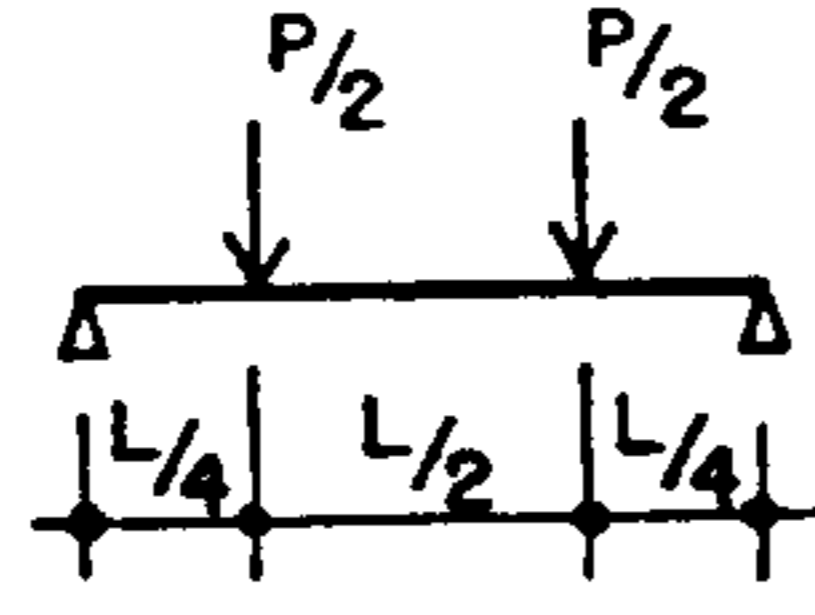
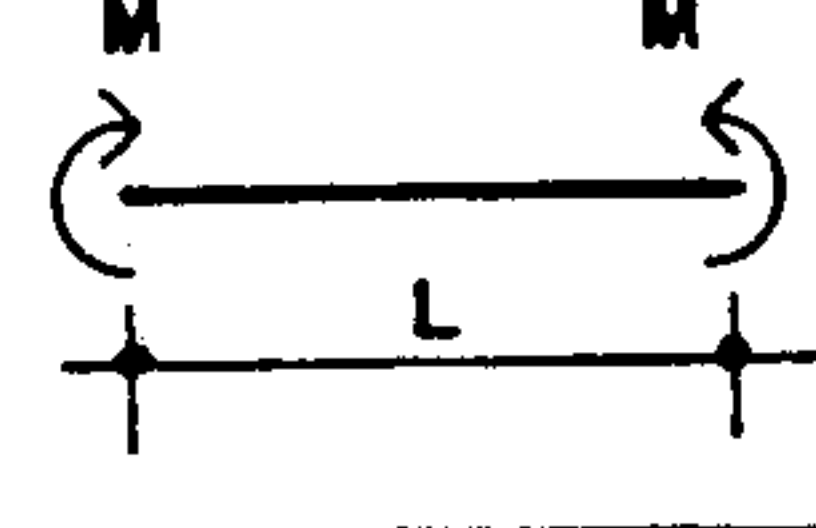
FLEXÃO	SEÇÃO TRANSVERSAL	
	RETANGULAR	CIRCULAR
<p>3 PONTOS</p> 	$\frac{1}{2(m+1)^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}(m+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)}$
<p>4 PONTOS</p> 	$\frac{m+2}{4(m+1)^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}(m+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$
<p>PURA</p> 	$\frac{1}{2(m+1)}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)}$

Figura 1 - Valores da relação V_e/V para ensaios típicos de flexão, onde m é o módulo de Weibull, $\Gamma(R)$ é a função gama para um número real $R > 1$.

formidade de tensões de fratura, onde são atribuídas diferentes probabilidades para as mesmas tensões.

Outra possibilidade clássica, mas raramente utilizada, é a de dividir o conjunto de dados experimentais em classes de tensão arbitrárias e representadas pelo valor médio σ_k entre os limites inferior e superior de cada classe k e totalizar o número de eventos i que atendem à condição:

$$\sigma_i \leq \sigma_k + \Delta\sigma/2, \quad (E)$$

onde $\Delta\sigma$ é o intervalo de classe admitido. Procedendo dessa maneira, tem-se a probabilidade acumulada de cada classe como sendo:

$$P_k = i/n. \quad (F)$$

A fim de tornar a distribuição menos subjetiva, é também usual definir o intervalo $\Delta\sigma$ como sendo:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_n - \sigma_1}{k} \quad (G)$$

onde σ_n e σ_1 são a maior tensão e a menor tensão observadas, respectivamente, e k é o número de classes estipulado. Caso alguma classe venha a conter um número menor do que 5 eventos, essa classe deve ser agrupada para a classe imediatamente superior.

Para proceder à regressão entre os valores das probabilidades P e das tensões σ têm-se preferido, na prática, utilizar o método dos mínimos quadrados lineares, que é bastante conhecido e amplamente disponível em programas de computador que contêm planilhas e utilitários para plotar gráficos. Esse método obtém uma solução exata e simples, que minimiza os quadrados dos desvios entre os valores estimados de uma determinada função linear e um conjunto de dados. Para tanto, é necessário linearizar a Equação (B), reescrevendo-a como:

$$y = m x + c \quad (H)$$

onde:

$$\begin{aligned} y &= \ln[-\ln(1-P)]; \\ x &= \ln(\sigma_{\max}); e \\ c &= \ln(V) - m \ln[\sigma_0 (V_e/V)^{1/m}] \end{aligned}$$

No entanto, esse procedimento embute um erro intrínseco da linearização, já que os desvios são numericamente diferentes entre P e seu estimador dado pelo termo à direita da Equação (B) e os logaritmos de P e os logaritmos do seu estimador indicado na Equação (H). Como o método minimiza esses desvios e as diferenças entre os logaritmos são mais pronunciadas para os valores mais elevados das tensões do que para os valores mais baixos, o procedimento de linearização é sensível aos valores experimentais mais extremos.

Como alternativa para aumentar a eficiência da regressão, Bergman (11) sugere omitir alguns valores dos extremos inferior e superior da distribuição de dados, até ser obtida a convergência nas estimativas dos parâmetros de Weibull. A inconveniência desse procedimento é a escolha do número de dados a serem omitidos de modo a minimizar as tentativas, além da evidente subjetividade a que os resultados obtidos ficam sujeitos.

DISTRIBUIÇÕES UTILIZADAS

Para efeito deste estudo, dois conjuntos independentes de 30 tensões de fratura, obtidos por ensaios diferentes e descritos a seguir, foram analisados, considerando-se 4 diferentes distribuições dos dados experimentais para a determinação da probabilidade acumulada de fratura. Essas distribuições foram identificadas como sendo:

(A) Todos os 30 dados experimentais ordenados de modo crescente e utilizando a Equação (D) para estimar a probabilidade de fratura.

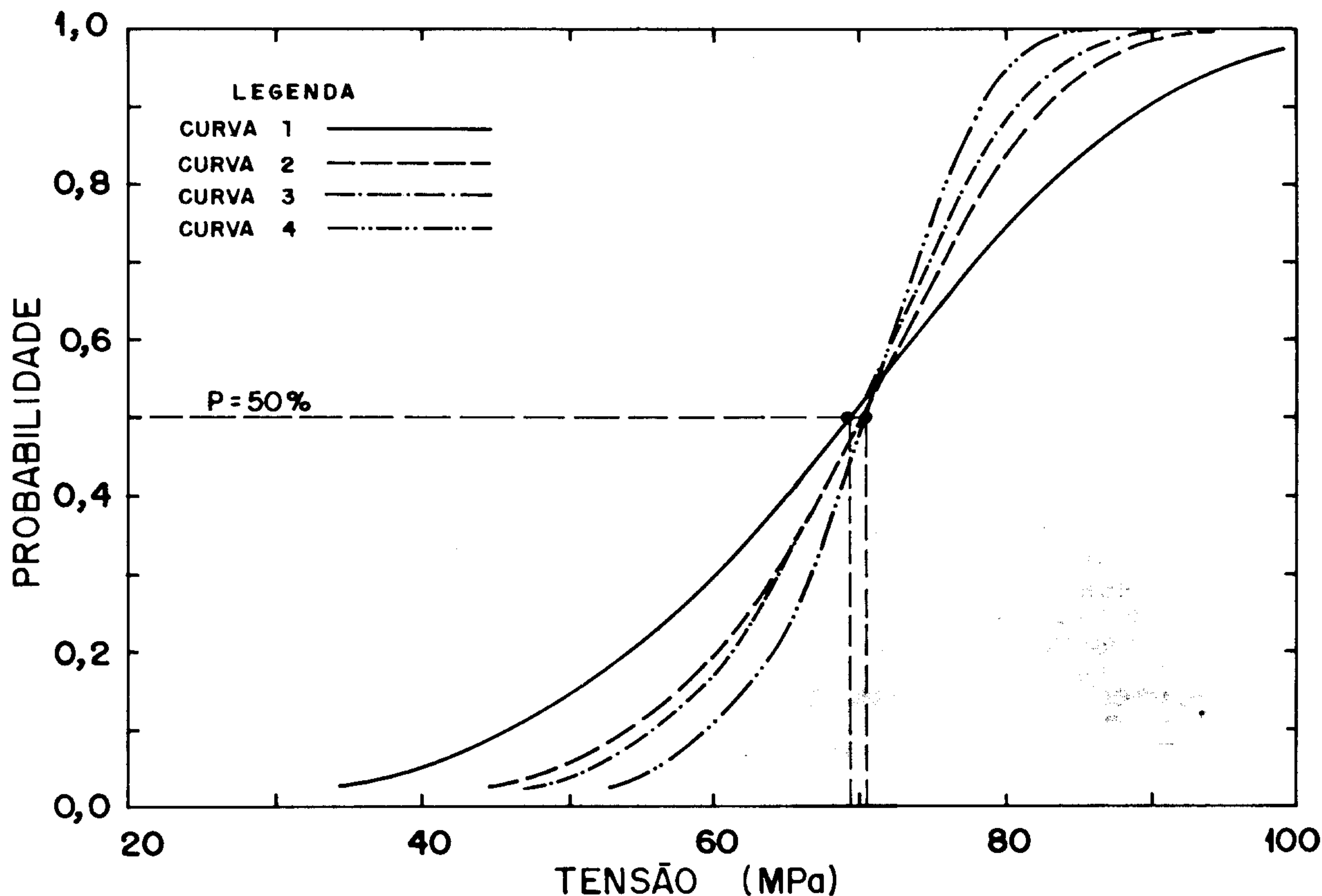


Figura 2 - Probabilidade acumulada de fratura para algumas regressões obtidas na Tabela II. Curva 1: $m = 4,68$; $s = 6,19$; Curva 2: $m = 7,27$; $s = 14,82$; Curva 3: $m = 8,27$; $s = 17,77$; Curva 4: $m = 11,36$; $s = 26,04$.

(B) Idem à distribuição A, mas com descarte dos 3 primeiros e dos 3 últimos dados do conjunto.

(C) Divisão em 10 classes com mesmo intervalo de variação de tensão, sendo obtida a probabilidade de fratura pela Equação (F), e agrupando-se as classes com menos do que 5 dados experimentais.

(D) Idem à distribuição C, mas com divisão em 6 classes.

Para estimativa dos parâmetros de Weibull dos materiais ensaiados, utilizaram-se dois procedimentos distintos, a saber:

a) regressão linear pelo método de mínimos quadrados com a Equação linearizada (H).

b) regressão não-linear por método iterativo computacional com a Equação exponencial (B).

Ensaio de flexão em barras de vidro:

Foram ensaiadas 30 barras de vidro Pyrex 7740 com diâmetro 6mm em flexão a 4 pontos, com vão externo de 40mm e vão interno de 20 mm. Antes do ensaio, a superfície cilíndrica das amostras foi riscada com lixas d'água nº 200 e nº 600 na direção longitudinal, com o intuito de criar uma distribuição homogênea de defeitos. O ensaio foi conduzido ao ar livre, à temperatura de 22°C e umidade relativa de 65%, em máquina universal Instron modelo 1127 com velocidade de deslocamento do travessão de 2mm/min. As tensões de fratura já dispostas em ordem crescente estão apresentadas no Apêndice 1.

Realizando-se as regressões de acordo com as distribuições indicadas, foram obtidas as estimativas para os parâmetros de Weibull mostradas na Tabela I. Cabe destacar que, ao invés da apresentação do valor de σ_0 , a Tabela I mostra o valor de:

$$s = \sigma_0 (V_e/V)^{1/m}, \quad (I)$$

já que o termo entre parênteses depende tanto do tipo de distribuição de tensões quanto do valor de m e deve ser obtido caso a caso

Tabela I - Parâmetros de Weibull para o vidro comercial (unidades utilizadas: MPa e m^3)

Distr.	regressão linear		regressão não linear	
	m	s	m	s
A	15,78	30,12	15,42	29,31
B	15,38	29,34	15,57	29,56
C	17,68	32,78	15,81	30,00
D	16,96	31,77	16,04	30,15

Ensaio de compressão diametral em cilindros de alumina:

Foram ensaiados 30 cilindros para moagem de alumina comercial produzidos pela NGK, com diâmetro de 13,36mm e espessura de 13,98mm em ensaio de compressão diametral. O ensaio foi conduzido em ambiente de laboratório através de máquina universal Instron modelo 1127, com velocidade de deslocamento do travessão de 0,2mm/min. As tensões de fratura já dispostas em ordem crescente estão apresentadas no Apêndice 2.

As regressões efetuadas de acordo com as distribuições indicadas, resultaram nos valores dos parâmetros de Weibull mostrados na Tabela II.

Tabela II - Parâmetros de Weibull para a alumina comercial (unidades utilizadas: MPa e m ³)				
Distr.	regressão linear		regressão não linear	
	m	s	m	s
A	4,68	6,19	8,29	17,94
B	7,27	14,82	8,69	19,11
C	11,36	26,04	8,27	17,94
D	9,73	21,54	8,27	17,77

A título de ilustração, a Figura 2 apresenta as curvas obtidas com os parâmetros estimados na Tabela II por quatro diferentes combinações de distribuições de dados e regressões, sendo três regressões lineares (Curvas 1, 2 e 4 correspondentes às distribuições A, B e C, respectivamente) e uma regressão não linear (Curva 3, correspondente à distribuição D). Foi escolhido apresentar apenas os resultados da alumina, em razão da maior dispersão observada para os valores das tensões de fratura em relação ao ensaio do vidro utilizado. Nessa Figura utiliza-se como coordenadas os valores da probabilidade acumulada de fratura e da tensão, conforme a regressão obtida com as Equações (B) e (F), e estão marcadas, como referência, uma reta horizontal correspondente à probabilidade acumulada de fratura de 50% e duas retas verticais correspondentes à faixa de variação das tensões de fratura médias daquelas regressões.

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR E TESTE DO QUI QUADRADO

A determinação do coeficiente de correlação linear R² entre os valores da probabilidade de fratura P de cada distribuição para cada tensão s e os valores estimados pelas regressões efetuadas para a mesma tensão foi feita utilizando-se a conhecida Equação (J):

$$R^2 = \frac{\left[\sum (P \cdot \hat{P}) - \frac{\sum P \cdot \sum \hat{P}}{n} \right]^2}{\left[\sum (P)^2 - \frac{(\sum P)^2}{n} \right] \left[\sum (\hat{P})^2 - \frac{(\sum \hat{P})^2}{n} \right]} \quad (J)$$

onde n é o número de dados experimentais. Caso P e \hat{P} fossem as coordenadas de um gráfico com os valores assim obtidos, a reta resultante teria coeficiente angular tanto mais próximo de um quanto maior a concordância entre os valores observados e calculados das probabilidades.

O teste do qui quadrado χ^2 mede de modo equivalente um certo desvio entre os valores experimentais observados e estimados, mas é um estimador assintoticamente mais eficiente do que R² para condições mais gerais e pode ser colocado na forma:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (K)$$

onde O_i e E_i são os números de eventos observados e estimados para uma determinada faixa de probabilidade P, respectivamente.

A realização do teste do χ^2 foi feita de acordo com o procedimento sugerido Hahn & Shpiro (10), onde é calculada, com os parâmetros estimados em cada distribuição, a tensão prevista σ_i que é o limite superior para 5 faixas de probabilidades acumuladas de fratura, de acordo com a fórmula:

$$P(\sigma_i) \leq 0,20i. \quad (L)$$

Calculadas as 5 tensões σ_i , são determinadas as quantidades O_i de eventos que se adaptam às faixas de tensões previstas, e o valor de χ^2 é obtido pela seguinte relação, já colocada em forma operacional para o caso de n dados experimentais divididos em 5 faixas de igual variação de probabilidade:

$$\chi^2 = 5/n (\sum O_i^2) - n. \quad (M)$$

Procedendo desta forma, o ajuste ideal é aquele que conduz a uma igual quantidade de eventos O_i em cada faixa de probabilidade, no caso tratado aqui equivalente a :

$$O_i = E_i = n/5 = 30/5 = 6. \quad (N)$$

Para esse valor hipotético de O_i, o valor de χ^2 é anulado. Para um caso real, o melhor ajuste corresponde a valores de O_i mais próximos do ideal, o que equivale a um valor mínimo de χ^2 . Como exemplo, estão reproduzidos na Tabela III os cálculos efetuados para a distribuição D com ajuste não-linear para o vidro comercial ensaiado (Apêndice 1).

Utilizando-se agora a Equação (M), tem-se:

$$\chi^2 = 5/30 (5^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) - 30 = 06 \quad (O)$$

Tabela III - Exemplo de cálculo do teste do χ^2 para a distribuição D com ajuste não linear para o vidro comercial			
i	faixa de P	σ_i (MPa)	O _i
1	0,00 < P ≤ 0,20	64,47	5
2	0,20 < P ≤ 0,40	27,89	7
3	0,40 < P ≤ 0,60	70,40	5
4	0,60 < P ≤ 0,80	72,92	6
5	0,80 < P ≤ 1,00	80,50	7

As Tabelas IV e V resumem os resultados obtidos para os ensaios do vidro e da alumina, respectivamente. Da análise dos resultados das Tabelas IV e V, pode-se verificar que o pior ajuste obtido entre os valores experimentais e os valores previstos com os parâmetros encontrados nas Tabelas I e II foi aquele utilizando a regressão linear com a distribuição A e o melhor ajuste foi obtido utilizando a regressão não-linear com a distribuição D.

Tabela IV - Coeficientes de correlação linear R ² e testes do χ^2 para o vidro comercial				
Distr.	regressão linear		regressão não linear	
	R ²	χ^2	R ²	χ^2
A	0,9685	2,33	0,9801	1,33
B	0,9598	2,33	0,9653	1,33
C	0,9968	1,67	0,9964	1,67
D	0,9890	1,67	0,9990	0,67

Tabela V - Coeficientes de correlação linear R ² e testes do χ^2 para a alumina comercial				
Distr.	regressão linear		regressão não linear	
	R ²	χ^2	R ²	χ^2
A	0,8830	8,00	0,9841	1,33
B	0,9372	2,00	0,9748	1,00
C	0,9835	2,33	0,9914	2,00
D	0,9698	1,33	0,9972	1,00

Da mesma forma, a regressão não-linear é sempre melhor do que a regressão linear para qualquer das distribuições de dados utilizadas. Além disso, como, em geral, as distribuições C e D são mais eficientes do que as distribuições A e B, pode-se dizer que a eficiência do ajuste aumenta quando se percorre as Tabelas IV e V da esquerda para a direita e de cima para baixo.

A distribuição B só foi mais eficiente do que a distribuição A para a regressão linear quando o valor inicial de m foi relativamente baixo, como no caso da alumina estudada. No caso do vidro (com maior módulo de Weibull m), não houve mudança significativa nas estimativas dos parâmetros com a regressão linear e distribuições A ou B, conforme pode ser observado na *Tabela I*.

A distribuição D (com número de classes equivalente ao total de eventos dividido por 5) é mais eficiente do que a distribuição C (com número arbitrário de classes).

O coeficiente de correlação linear e o qui quadrado são equivalentes para uma mesma distribuição com diferentes tipos de regressão, ou seja, os dois valores indicam melhor ajuste quando se usa a equação exponencial do que a equação linearizada. No entanto, o coeficiente de correlação não avalia adequadamente a precisão do ajuste, já que é obtido em relação ao número de dados utilizado em cada distribuição. Esse fato pode ser comprovado comparando-se os valores de R^2 e χ^2 para as distribuições A da regressão não linear e C do ajuste linear da *Tabela IV* (ou comparando-se as distribuições A e B da regressão não linear da *Tabela V*).

Na *Tabela II* observa-se que, quando o valor de m é baixo, a regressão linear é bastante sensível ao tipo de distribuição de dados, já que tanto m quanto s variam bastante, enquanto que para a regressão não linear, esses mesmos parâmetros variam pouco. De modo equivalente, as diferenças entre os parâmetros de Weibull estimados pelo melhor e pelo pior ajuste somente são significativas na *Tabela II*, sendo desprezíveis na *Tabela I*. A *Figura 2* mostra que as quatro distribuições plotadas praticamente estimam a mesma tensão média de fratura (50% de probabilidade de fratura).

As curvas 2 e 3, bem como as possíveis outras curvas que poderiam ser plotadas com os valores da *Tabela II*, são bastante próximas e são mais distinguíveis para tensões acima do valor médio, conforme pode ser observado na *Figura 1*. De modo inverso, quando é plotado um gráfico linearizado conforme a Equação (H), essas curvas são praticamente equidistantes, tanto acima como abaixo do valor de tensão média de fratura, já que as escalas estão distorcidas pelos logaritmos envolvidos.

Um importante teste que pode ser realizado a partir do valor do χ^2 é o de verificar, com um determinado nível de significância, se os parâmetros estimados na *Tabelas I e II* fornecem uma idealização suficientemente boa para os materiais ensaiados, ou seja, verificar a boa ou má aderência dos dados experimentais aos modelos propostos. Tal verificação pode ser realizada comparando o valor calculado com um valor crítico obtido de tabelas do qui quadrado. Caso o valor calculado seja inferior ao crítico, admite-se que a aderência é suficientemente boa.

Como, nos testes efetuados, arbitrou-se k = 5 classes e sendo r = 2 os parâmetros estimados, o número de graus de liberdade f da estatística é:

$$f = k - r - 1 = 2 \quad (P)$$

e, para um nível de significância usualmente estipulado de 5%, o valor crítico do qui quadrado é 5,991. Comparando-se este valor com os valores encontrados nas *Tabelas IV e V*, verifica-se que, com exceção da distribuição A com regressão linear da alumina, todas as estimativas dos parâmetros de Weibull obtidas com as diferentes distribuições e regressões são suficientemente boas e não podem ser rejeitadas, a um nível de significância de 5%.

No entanto, da própria definição dada pela Equação (K) sabe-se que, quanto menor for o resultado do teste do qui quadrado, maior é a confiança na estimativa dos parâmetros de ajuste da distribuição de dados. Assim, é bastante significativo o fato de que a escolha de um procedimento adequado pode levar a uma otimização na determinação dos parâmetros de Weibull.

CONCLUSÕES

A linearização da Equação (B) embute um erro na determinação de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados e, por essa razão, é sempre preferível, quando possível, utilizar a equação exponencial. Esse erro é tanto maior quanto maior a dispersão dos dados experimentais.

Para qualquer regressão efetuada, a estimativa da probabilidade acumulada de fratura pela divisão em classes de tensão e de acordo com a Equação (F) é mais eficiente do que a obtida pela posição relativa dos dados experimentais arranjados de modo crescente e de acordo com a Equação (D).

O número de classes de tensão deve ser tal a corresponder, no máximo, a um quinto do número total de dados experimentais. Caso ainda assim essa divisão corresponda a um número de eventos inferior a 5 em qualquer classe, essa deve ser agrupada com a classe de tensão imediatamente superior.

APÊNDICE 1

Tensões de fratura em ensaio de flexão a 4 pontos de barras cilíndricas de vidro comercial, em MPa:

55,51 - 61,99 - 62,45 - 63,15 - 63,61 - 64,77 - 66,15 - 66,62
67,08 - 67,31 - 67,77 - 67,77 - 68,24 - 68,24 - 68,93 - 69,39
69,62 - 70,55 - 70,78 - 71,01 - 71,70 - 71,70 - 71,70 - 74,01
75,41 - 75,64 - 75,87 - 76,33 - 77,72 - 80,49

APÊNDICE 2

Tensões de fratura em ensaio de compressão diametral de cilindros de alumina comercial, em MPa:

29,22 - 31,25 - 51,07 - 51,96 - 57,04 - 62,00 - 63,52 - 64,66
65,55 - 66,44 - 67,97 - 68,09 - 68,35 - 68,35 - 68,73 - 70,38
70,63 - 71,40 - 72,67 - 73,43 - 73,68 - 74,19 - 75,97 - 77,24
77,49 - 79,78 - 85,12 - 85,24 - 86,26 - 89,18

REFERÊNCIAS

- (1) TRUSTRUM, K. & JAYATILAKA, A. S. - Applicability of Weibull analysis for brittle materials - J. Mater. Sci. 18(9); 2765, 1983.
- (2) WEIBULL, W. - A statistical distribution function of wide applicability - J. Appl. Mech. 18(3); 293, 1951.
- (3) SCOTT, W. D. & GADDIPATI, A. - Weibull parameters and the strength of long glass fibers. In: Fracture Mechanics of Ceramics. Vol. 3; R. C. Bradt, D. P. H. Hasselmann & F. F. Lange (eds), pp. 125-142 Plenum Press, New York, 1978.
- (4) MIGLIORE JR., A. R. & ZANOTTO, E. D. - Efeito do volume efetivo sobre a resistência mecânica de cerâmicas e vidros através da estatística de Weibull - 9ª CBECIMAT - anais vol. 2; 539, 1990.
- (5) LEÓN, M. & KITTL, P. - On the estimation of Weibull's parameters in brittle materials - J. Mater. Sci. 20(10); 3778, 1985.
- (6) GLANDUS, J. C. & BOCH, P. - Uncertainty on the mean strength and Weibull's modulus of an alumina batch as a function of the number of samples - J. Mater. Sci. Lett. 3 (1); 74, 1984.
- (7) LEÓN, M. & KITTL, P. - On the dispersion of the parameters in the Weibull fracture statistics - Latin Am. Metalurgia y Materiales 4(2); 103, 1984.
- (8) IKEDA, K.; IGAKI, H. & KURODA, T. - Fracture strength of alumina ceramics under uniaxial and triaxial stress states. Am. Ceram. Soc. Bull. 65(4); 683, 1986.
- (9) BATDORF, S. B. - Fundamentals of the statistical theory of fracture, In: Fracture Mechanics of Ceramics. vol. 3 R. C. Bradt, D. P. H. Hasselmann & F. F. Lange (eds) pp.1-30 Plenum Press, New York, 1978.
- (10) HAHN, G. J. & SHPIRO, S. S. - Statistical Models in Engineering. John Wiley, New York, 1967.
- (11) BERGMAN, B. - On the analysis of brittle fracture statistics - Scand. J. Metall. 15(2); 90, 1986.
- (12) COSTA NETO, P.L.O. - Estatística. Edgard Blücher, São Paulo, 1977.